♦ سلم تصحيح اختبار الثنائيات ♥

السؤال الأول:

1) $2 \leq u_n \leq 3$

1. نبرهن للقضية: $E(n): 2 \leq u_n \leq 3$
2. نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=0$:

$E(0): 2 \leq u_0 \leq 3$ (5)

$2 \leq \frac{5}{2} \leq 3$ محققة. (5)

3. نفرض صحة العلاقة من أجل n:

$E(n): 2 \leq u_n \leq 3$ ... ⊛ (5) (فرضية)

4. نبرهن صحة العلاقة من أجل $(n+1)$ أي نبرهن:

$E(n+1): 2 \leq u_{n+1} \leq 3$ (5)

نطلق من ⊛: $2 \leq u_n \leq 3$ (5)

طريقة أولى: نطرح (2-): $0 \leq u_n - 2 \leq 1$ (5)

نربع $0 \leq (u_n-2)^2 \leq 1$ (5)

نضيف (2): $2 \leq (u_n-2)^2 + 2 \leq 3$ (5)

$2 \leq u_{n+1} \leq 3$ (5)

وهو المطلوب.

طريقة ثانية: نفرض تابع: $f(x) = (x-2)^2 + 2$

نشتق: $f'(x) = 2(x-2) = 2x - 4 = 0$

$x = 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘	2	↗	

التابع متزايد تماماً بدءاً من المجال $[2; +\infty[$ (2)

نعوض بأطراف ولا تغير جهة المتراجحة.

$f(2) \leq f(u_n) \leq f(3)$

$2 \leq u_{n+1} \leq 3$

وهو المطلوب.

(2) إثبات المتتالية متناقصة: نثبت بالتدريج

الشرط: $u_{n+1} \leq u_n$

1. نبرهن القضية: $E(n): u_{n+1} \leq u_n$ (5)
2. نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=0$:

$E(0): u_1 \leq u_0$ (5)

$\frac{9}{4} \leq \frac{5}{2}$ (محققة) (5)

3. نفرض صحة العلاقة من أجل n:

$E(n): u_{n+1} \leq u_n$ ... ⊛ (5) (فرضية)

4. نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$ أي نبرهن:

$E(n+1): u_{n+2} \leq u_{n+1}$ (5)

طريقة أولى: نطلق من ⊛: $u_{n+1} \leq u_n$ (5)

نضيف (2-) $u_{n+1} - 2 \leq u_n - 2$ (5)

السؤال الثالث: (1) $f(x)=\frac{2x+3}{x+5}$

$f'(x)=\frac{2(x+5)-(2x+3)}{(x+5)^2}$

$=\frac{2x+10-2x-3}{(x+5)^2}=\frac{7}{(x+5)^2}>0$

الدالة f متزايدة تماماً.

(2) لإثبات أن $u_n=f(n)$

و f متزايدة تماماً فالمتتالية متزايدة تماماً

(3) $\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+3}{n+5}=2$ حيث

(4) طريقة (1): $u_n\leq 2$

$u_n-2\leq 0$

$\frac{2n+3}{n+5}-\frac{2}{1}\leq 0$

$\frac{2n+3-2n-10}{n+5}\leq 0$

$\frac{-7}{n+5}\leq 0$ وهو المطلوب.

طريقة (2):

$f(x)=\frac{2x+3}{x+5}$

$f'(x)=\frac{7}{(x+5)^2}>0$

x	0		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	$\frac{3}{5}$	↗	2

$\Rightarrow f(x)\leq 2$

$\Rightarrow \boxed{u_n\leq 2}$ من الجدول نلاحظ أن:

نريد: $(u_{n+1}-2)^2\leq(u_n-2)^2$

نضيف: (+2)

$(u_{n+1}-2)^2+2\leq(u_n-2)^2+2$

$u_{n+2}\leq u_{n+1}$

وهو المطلوب.

طريقة ثانية: لدينا سابقاً f تابع متزايد تماماً.

نعود للأعراف ونغير جهة التباطؤ:

$f(u_{n+1})\leq f(u_n)$

$u_{n+2}\leq u_{n+1}$

وهو المطلوب.

السؤال الثاني: متتالية حسابية: $r=5$

$u_1=-2$

$u_n-u_1=r(n-1)$

$u_n+2=5(n-1)$

$u_n=5n-5-2=\boxed{5n-7}$

$S_n=u_1+u_2+\dots+u_{15}$

حيث: $u_{15}=5(15)-7$

$=75-7=\boxed{68}$

$S_n=$ عدد الحدود $\left(\frac{a+l}{2}\right)$

$=15\left(\frac{u_1+u_{15}}{2}\right)=15\left(\frac{-2+68}{2}\right)$

$S_n=15\times 33=\boxed{495}$

السؤال الرابع: ♥ (1

$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \text{const}$ (5

$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{x_{n+1}+3}{x_n+3} = \frac{\frac{1}{3}x_n - 2 + 3}{x_n+3}$ (5

$= \frac{\frac{1}{3}x_n + 1}{x_n+3} = \frac{\frac{1}{3}(x_n+3)}{x_n+3} = \frac{1}{3} = \text{const}$ (5

المتتالية هندسية أساسها $\boxed{q = \frac{1}{3}}$ (5

نثبت y_n بدلالة n ثم x_n بدلالة n.

باستخدام علاقة تربط y_n بـ y_0:

$\frac{y_n}{y_0} = q^{n-0}$ (5 ; $y_0 = x_0 + 3$

$\boxed{y_0 = 6}$ (5

$\frac{y_n}{6} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ (5

$y_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{6}{3^n}$ (5

$\Rightarrow x_n = y_n - 3$ (5

$\boxed{x_n = \frac{6}{3^n} - 3}$ (5

(2 $x_{n+1} < x_n$

1. نبرهن للقضية: $E(n): x_{n+1} < x_n$ (5

2. نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=0$:

$E(0): x_1 < x_0$ (5

$-1 < 3$ (صحيحة) (5

3. نفرض صحة العلاقة من أجل n:

$E(n): x_{n+1} < x_n$ --- (*) (5

(صحيحة فرضاً)

4. نبرهن صحة العلاقة من أجل $(n+1)$ أي نبرهن:

$E(n+1): x_{n+2} < x_{n+1}$ (5

نتوفر من (*):

$x_{n+1} < x_n$ (5

نضرب بـ $\left(\frac{1}{3}\right)$:

$\frac{1}{3}x_{n+1} < \frac{1}{3}x_n$ (5

نضيف (-2):

$\frac{1}{3}x_{n+1} - 2 < \frac{1}{3}x_n - 2$ (5

$\boxed{x_{n+2} < x_{n+1}}$

100

السؤال الخامس: (1

$S_1 = 1^2 = 1$ (5

$S_2 = 1^2 + 2^2 = 5$ (5

$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$ (5

$S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$ (5

$\vdots$

$S_{n+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2$ (5

$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$ (5

(2 1. نبرهن للقضية:

$E(n): S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (5

2. نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=1$:

$E(1): S_1 \overset{?}{=} \frac{6}{6}$ (5

$1 = 1$ (صحيحة) (5

3. نفرض صحة العلاقة من أجل n:

(5) $E(n): S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ..... (*)

(وتسمى فرضية التدريج)

4. نبرهن صحة العلاقة من أجل $(n+1)$ أي نبرهن:

(10) $E(n+1): S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

(5) $l_1: S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$

(5) $S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

(5) $= (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + n+1\right]$

(15) $= (n+1)\left[\frac{2n^2+n+6n+6}{6}\right]$

(10) $= (n+1)\left(\frac{(n+2)(2n+3)}{6}\right) = l_2$

100

وهو المطلوب.